

## Параметры с нуля и до ЕГЭ. Как научить?

### Предисловие.

В предисловии было бы не лишним упомянуть, что такими громкими слоганами, как название этой статьи, часто пестрят рекламные промо онлайн и офлайн школ подготовки к ЕГЭ. Можно ли за условный год или 2 научить решать ЕГЭ на высокие баллы? Стоит ли заниматься исключительно подготовкой к ЕГЭ, игнорируя школьные темы? Хорошо ли то, что первая часть предсказуема в большей своей степени, равно как и многие задания из второй части по сути своей достаточно типовые и стандартные? Да и в целом, не превращается ли подготовка к экзамену в наreshивание однотипных задач?

Оставим все эти вопросы открытыми, мнения на них самые разные и думается, нет единого правильного ответа. В то же время сложно поспорить с тем, что задание с параметром действительно является неплохой исследовательской задачей, где можно достаточно творчески подойти к методике решения.

Аналитический метод, безусловно, является ведущим для решения ЛЮБЫХ задач с параметром, но все же большинство заданий ЕГЭ наглядно и красиво решаются графикой.

За громким заголовком «С нуля и до ЕГЭ», в отличие от рекламы вышеупомянутых школ стоит немного иной смысл: хочется именно рассмотреть обучение графике с нуля (7-8 классы) и показать ребятам, что самое сложное задание ЕГЭ более чем реально, причем начинать можно с прямых. Собственно, о различных прямых в задании номер 18 сегодня и пойдет речь.

### Графический метод решения: построение и исследование линейных функций в дробно-рациональных уравнениях с параметром.

В ЕГЭ по математике одним из самых сложных типов заданий по праву считаются параметры, за которые на сегодняшний день дается 4 первичных балла. Иван Валерьевич Яценко неоднократно заявлял, что все задания ЕГЭ под силу решить любому школьнику, и в нем нет заданий, выходящих за рамки школьной программы.

Так что же такое параметры? Алгебра, геометрия, функции, аналитическая геометрия на плоскости, ограниченность и монотонность функций - все это поможет подступиться к задачам с параметрами и решить их не только тривиальными методами и аналитическим исследованием, но и построить красивые графики, перейти от динамичной картинке к статичной плоскости  $xOa$ , увидеть сжатие/растяжение и движение центра окружности вдоль прямых, а так же покрутить пучок прямых вокруг некоторой точки - все это помогает в полной мере прочувствовать красоту и изящество графического метода, его наглядность.

Сегодня мы рассмотрим, как параметры красной нитью проходят через весь курс школьной алгебры, предложим методы для лучшего понимания и наглядной интерпретации графических решений, начиная с самых базовых и заканчивая ЕГЭ 2024.

### Прямая, которая движется.

Итак, если задать ученику 7-9 класса вопрос об уравнении прямой, ответом скорее всего будет:  $y = kx + b$ . Разумеется, все так. Или нет? На самом деле, приведенное выше уравнение задает график линейной функции, который может охватить любую прямую в координатной плоскости, кроме тех прямых, которые проходят параллельно оси  $Oy$ . Таким образом, уравнение, задающее совершенно любую прямую лучше запишем так  $ax + by + c = 0$  - тогда и прямые, параллельные оси  $Oy$  также будут включены в работу.

Конкретизация прямых с параметром может происходить по-разному, а в редких исключениях прямая и вовсе не конкретизируется, но в целом удобно классифицировать их так:

1. Пучок прямых (множество прямых, семейство прямых) со стабильным числовым угловым коэффициентом.

Прямые такого вида удобно двигать снизу вверх вдоль всей координатной плоскости от  $-\infty$  до  $+\infty$

Примеры таких прямых:

1.1  $y = 4x + a$  - множество прямых, параллельных прямой  $y = 4x$

1.2  $y = -2x + a$  - множество прямых, параллельных прямой  $y = -2x$

**1.3**  $y = 4x + 2a - 1$  - множество прямых, параллельных прямой  $y = 4x$

**1.4**  $y = -2x + 2a - 1$  - множество прямых, параллельных прямой  $y = -2x$

При этом точка пересечения каждой из прямых с осью  $Oy$  есть свободный член в уравнении прямой - в первых двух случаях прямая, двигаясь, пересекает ось в точке  $(0; a)$ , а во примерах 1.3 и 1.4 точка пересечения с осью  $Oy$   $(0; 2a - 1)$

Для упражнения предлагаем ученикам в 7 классе построить множество таких прямых, варьируя значения параметра, для наилучшего понимания движения при использовании декартовой системы координат  $XOY$ . А начиная с 8 класса, стоит показать построение с помощью тангенса угла наклона прямой. Грамотное определение наклона и построения прямой с соблюдением условия  $k = tg\alpha$  поможет в дальнейшем и для решения заданий ОГЭ, а также в 10-11 классе при изучении производных наглядно интерпретирует формулу и поможет установить взаимосвязь между значением производной в некоторой точке и угловым коэффициентом касательной, в частности использующую угловой коэффициент касательной для нахождения значения производной функции  $f'(x)$  в точке  $x_0$ :

$$f'(x_0) = k = tg\alpha$$

А также такой способ задания прямой очень сэкономит время на ЕГЭ для решения задания номер 11, для решения которого необходимо восстановить функцию по ее графику.

Для упражнения предлагается также построить графики некоторых линейных функций и установить их взаимосвязь, в частности хорошо раскрывается помимо параллельности условие перпендикулярности для двух прямых, как правило ученикам удается при аккуратном построении «угадать» то самое условие:  $k_1 \times k_2 = -1$

### Упражнения для самостоятельного построения:

Постройте в одной системе координат графики линейных функций и определите их взаимное расположение (параллельность, перпендикулярность, совпадение)

1.  $y = 2x + 3$
2.  $y = 2x - 5$
3.  $y = -0,5x + 2$
4.  $y = 4x - 5$
5.  $y = -\frac{1}{4}x + 3$

### Пучок прямых - как зафиксировать точку на плоскости?

**2.** Пучок прямых с угловым коэффициентом, зависящим от параметра.

В случае, когда угловой коэффициент прямой зависит от параметра, необходимо при построении зафиксировать прямую, другими словами - указать точку, вокруг которой найденная прямая будет вращаться.

При этом предлагается найти такую точку координатной плоскости, при подстановке которой в уравнение прямой, параметр бы уничтожился.

Рассмотрим несколько примеров такой конкретизации:

**2.1**  $y = ax + 4$  - пучок прямых, проходящих через точку  $(0; 4)$ . Такой пример является очень простым и точка быстро определяется-свободный член в заданном уравнении прямой и есть точка пересечения с осью  $Oy$ .

**2.2**  $y = ax - 2a$ . С прямыми такого вида чуть сложнее разобраться. Но после вынесения параметра за скобки уравнение прямой принимает вид  $y = a(x - 2)$ , становится ясно, что при подстановке  $x = 2$  уравнение прямой принимает вид  $y = 0$ , параметр уничтожается, а значит, мы определили точку, через которую проходит прямая:  $(2; 0)$ .

**2.3**  $y = ax - a + 2$ . Поступим с заданным уравнением аналогично примеру 2.2, после вынесения параметра за скобки прямая принимает вид  $y = a(x - 1) + 2$ . Очевидно, что при подстановке  $x = 1$  уравнение пример вид  $y = 2$ , а значит заданный пучок прямых проходит через точку  $(1; 2)$

### Упражнения для самостоятельного построения:

Найдите точку в декартовой системе координат, через которую проходит любая прямая вида:

1.  $y = ax - 4$
2.  $y = 2ax - 4a$
3.  $y = ax + a$
4.  $y = ax + a + 2$
5.  $y = 2ax - 4a - 3$

Ко всему прочему следует отметить, что совершая поворот вокруг стабильной точки, прямая принимает не все положения на координатной плоскости, при ненулевом коэффициенте перед переменной  $y$  прямая не может быть параллельной оси  $Oy$ , при этом следует помнить, что если прямая стремится к вертикальному положению справа, то ее угловой коэффициент стремится к  $+\infty$ , а если слева, то к  $-\infty$ . Такое положение прямой при решении заданий с параметром графическим методом следует также учитывать.

Для наилучшего понимания удобства перехода к построению прямых в 7 классе предлагается построить график уравнения:  $y^2 - xy - 7y + 4x + 12 = 0$  Нетрудно заметить, что заданное уравнение есть вырожденная кривая второго порядка-не что иное как пара пересекающихся прямых. Для построение заданного примера в 7 классе необходимо разложить на множители левую часть, используя искусственный прием: представить слагаемое  $-7y$  как сумму  $-3y - 4y$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} y^2 - xy - 3y - 4y + 4x + 12 &= 0 \\ y(y - 4) - x(y - 4) - 3(y - 4) &= 0 \\ (y - 4)(y - x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Полученное произведение есть 2 пересекающиеся прямые:  $y = 4$  и  $y = x + 3$ .

Таким образом, начиная с 7 класса предлагается показать практическое применение разложения на множители для построения прямых в декартовой системе координат и при решении некоторых типов задач с параметрами, предлагающихся на ЕГЭ.

Еще одно оригинальное упражнение предлагается выполнить в 8 классе, после изучения квадратичной функции и ее графика. Предлагается построить график уравнения  $x^2 - 2x + 3 = 0$ . В 8 классе после решения бесчисленного множества всевозможных видов квадратных уравнений при первом взгляде на уравнение такого вида у большинства школьников возникает справедливый ассоциативный ряд: квадратное уравнение  $\rightarrow$  дискриминант, а затем тут же вспоминается парабола с тем самым  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  из справочного материала КИМ ОГЭ. После нахождения вершины несуществующей параболы, как правило приходит резонный вопрос: а где же тут  $y$ ? После этого предлагается построить график такого уравнения  $y = x^2 - 2x + 3$ . После этого несложного упражнения приобретает полезный навык отличать прячущиеся уравнения прямых там, где они маскируются под квадратичную функцию, а графиком полученного уравнения  $x^2 - 2x + 3 = 0$  являются две параллельные прямые  $x = 1$  и  $x = 3$ , полученные при решении квадратного уравнения.

### Невидимые прямые-как проиллюстрировать и для чего?

#### 3. Построение частей графика, которых нет.

Зачастую на практике можно столкнуться с необходимостью построения графиков дробно-рациональных уравнений, при этом необходимым условием является строгое соблюдение ограничения на знаменатель. При решении таких уравнений на практике, как известно, переходят к системе.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

Геометрически интерпритировать это легко представляется возможным с помощью «невидимых частей графика», изобразить которые можно пунктиром для наглядности.

Рассмотрим следующий пример. Построим график уравнения:

$$\frac{(y-x)(y-4x-1)}{(x-1)(y+2x-1)} = 0$$

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} (y-x)(y-4x-1) = 0, \\ (x-1)(y+2x-1) \neq 0. \end{cases}$$

Далее перейдем путем равносильных преобразований к следующей системе:

$$\begin{cases} y-x=0, \\ y-4x-1=0, \\ x-1 \neq 0, \\ y+2x-1 \neq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ y=4x+1, \\ x \neq 1, \\ y \neq -2x+1. \end{cases}$$

Заданную систему не составит трудности построить даже для ученика 7 класса. Сначала построим две прямые, объединенные совокупностью, а две оставшиеся прямые построим пунктиром (на самом деле их не существует!). При пересечении существующих прямых несуществующими образуются выколотые точки, где уравнение не имеет смысла, а значит и графика там существовать не должно.

### Упражнения для самостоятельного построения:

В декартовой системе координат визуализируйте графики следующих уравнений:

1.

$$\frac{y-2x+3}{x-2} = 0;$$

2.

$$\frac{y+2x-5}{y-2x+8} = 0;$$

3.

$$\frac{x^2-9}{y-2x} = 0;$$

4.

$$\frac{(2y-4x+6)(2x-4)}{x^2-4} = 0;$$

5.

$$\frac{(6-2y)(y-3)}{(y-2x+1)(x-4)} = 0.$$

### Прямая, которая познала бесконечность - как увидеть и описать?

4. Исследование пучка прямых при необходимой вертикализации прямой.

Рассмотрим простой пример. Определим, при каких значениях параметра  $a$  прямая  $y = ax$  имеет с графиком  $(y-2x+1)(x-3) = 0$  ровно одну общую точку.

Заметим, что указанная прямая конкретизируется очень просто, способом, известным всем с 7 класса - это прямая пропорциональность, в частности, линейная функция, проходящая через начало координат. Графиком же указанного уравнения являются 2 прямые, одна из которых задается уравнением линейной функции  $y = 2x - 1$ , а вторая - прямая, параллельная оси  $Oy$ . Нетрудно заметить, что при  $a = 2$  прямые параллельны, а значит и пересечение будет только с прямой  $x = 3$ . При этом параллельность прямых  $y = ax$  и  $x = 3$  не может быть достигнута в принципе по определению функции (здесь стоит обратить внимание учеников на то, что график уравнения и график функции - не одно и то же, и что каждому значению аргумента должно соответствовать ровно одно значение функции, что для прямой  $x = 3$  явно недостижимо). Все оказалось достаточно просто, но здесь стоит рассмотреть и другой пример.

Пусть прямая  $y = ax$  по условию должна пересечь луч, заданный следующим условием:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y = 2. \end{cases}$$

ровно в одной точке. Ясно, что все положительные значения параметра будут удовлетворять необходимому условию. На оси  $Oy$  при этом появляется выколотая точка  $(0; 2)$ , и, как было рассмотрено выше, вертикального положения прямая занять не может. При этом для ребят будет полезно «вручную» поувеличивать угловой коэффициент прямой, можно проверить прямые  $y = 10x$ ,  $y = 100x$ ,  $y = 1000000x$  - тогда становится ясно, что прямая при стремлении углового коэффициента к  $+\infty$  почти сливается с осью  $Oy$ , впрочем, никогда ее не достигая. Таким образом, ответом на задачу будет интервал  $a \in (0; +\infty)$ . То есть если необходимая прямая стремится к оси  $Oy$  (или любой другой прямой, параллельной оси  $Oy$  справа, то ее угловой коэффициент стремится к  $+\infty$ , а если слева, то наоборот - к  $-\infty$ ).

### Упражнения для самостоятельного построения:

При каких значениях параметра  $a$  система имеет ровно одно решение (ранее упоминалось, что одно решение необходимо здесь интерпретировать как одну общую точку пересечения прямых при заданных условиях):

1. 
$$\begin{cases} y = ax - 1, \\ x > 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} y = ax + 2, \\ x < 0, \\ y = -2. \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} y = ax + a - 3, \\ x < 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} y = 2ax - 6, \\ x < -2, \\ y = 3. \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} y = 2ax + 2a - 2, \\ x > 1, \\ y = 4. \end{cases}$$

### Куда исчезла ось $Oy$ - или переходим от динамике к статичной картинке.

5. Удобство использования системы координат  $xOa$ .

Очень часто при графическом построении удобно использовать переименование оси. Рассмотрим пример, который очень удобно строится в системе координат  $xOa$ . Необходимо определить все зна-

чения параметра, при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных решения:

$$\frac{x^2 - 4a^2}{2x - a} = 0$$

Прежде всего, перейдем к системе:

$$\begin{cases} x^2 - 4a^2 = 0, \\ 2x - a \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2a)(x + 2a) = 0, \\ a \neq 2x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}x, \\ a = -\frac{1}{2}x, \\ a \neq 2x. \end{cases}$$

Далее в системе координат  $xOa$ , переименовывая ось  $Oy$  в ось  $Oa$ , построим две прямые из совокупности и невидимую прямую, которая при пересечении образует с графиком выколотые точки. После построения необходимо использовать «считывающую прямую», которой в данном случае будет являться прямая, параллельная оси  $Ox$ , при этом при имитации движения прямой снизу вверх (для этого очень удобно использовать линейку) происходит «считывание» количества решений - оно будет совпадать с количеством точек пересечения такой прямой с графиком. Такое построение в некоторых случаях достаточно наглядно и позволяет не пропустить ни одого значения параметра.

### Упражнения для самостоятельного построения:

При каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет ровно 1 решение:

1.

$$\frac{x^2 - 9}{x + a} = 0$$

2.

$$\frac{2a - x}{x + 2} = 0$$

3.

$$\frac{a^2 - 9x^2}{a + 4x - 2} = 0$$

4.

$$\frac{4a^2 - x^2}{a - x} = 0$$

5.

$$\frac{a^2 - x^2}{(2a + 4x + 2)(a - x + 1)} = 0$$

### Задания, предлагающиеся на ЕГЭ, решаемые исключительно построением прямых и исследованием их взаимного расположения.

Итак, были рассмотрены различные прямые, линейные функции и не только, которые безусловно являются отправной точкой, неким стартом для решения задач с параметром графическим методом. Хотелось бы добавить, что в дальнейшем будут рассмотрены и другие элементарные графики, такие как гипербола, парабола, окружность и их элементы. И все же, в некоторых заданиях ЕГЭ действительно достаточно только прямых. Выборка из нескольких таких заданий предлагается для самостоятельного построения с небольшими комментариями и подсказками учителя, такие задания станут доступными не только для 9-11 класса, но и для 7 и 8.

### Упражнения для самостоятельного построения:

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} (y - 7) = xy - 5(x + 2), \\ x \leq 6, \\ \frac{a(x-6)-2}{y-2} = 1. \end{cases}$$

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет единственный корень:

$$x - a = \sqrt{x - 3a}$$

3. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных решения:

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет ровно один корень:

$$\sqrt{3 - 5x} \ln(4x^2 - a^2) = \sqrt{3 - 5x} \ln(2x + a)$$

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет ровно один корень:

$$\ln(4x - 1) \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0$$

### Послесловие.

В данной работе не раскрыты метод областей, метод интервалов для графической интерпретации неравенств. В дальнейшем предполагаются еще статьи, в которых будут рассмотрены и другие графики, а также раскрыта визуализация неравенств на координатной плоскости. Также планируется рассмотреть все эти темы и углубиться в более содержательные графические методы решения задач с параметрами из ЕГЭ и не только.

### Приложение.

В приложении предлагаются задания для самостоятельного решения построения, которые можно использовать на уроках алгебры, начиная с 7 класса.

Постройте в одной системе координат графики линейных функций и определите их взаимное расположение (параллельность, перпендикулярность, совпадение)

1.1  $y = 2x + 3$

1.2  $y = 2x - 5$

1.3  $y = -0,5x + 2$

1.4  $y = 4x - 5$

1.5  $y = -\frac{1}{4}x + 3$

Найдите точку в декартовой системе координат, через которую проходит любая прямая вида:

2.1  $y = ax - 4$

2.2  $y = 2ax - 4a$

2.3  $y = ax + a$

2.4  $y = ax + a + 2$

2.5  $y = 2ax - 4a - 3$

В декартовой системе координат визуализируйте графики следующих уравнений:

3.1

$$\frac{y - 2x + 3}{x - 2} = 0;$$

3.2

$$\frac{y + 2x - 5}{y - 2x + 8} = 0;$$

3.3

$$\frac{x^2 - 9}{y - 2x} = 0;$$

3.4

$$\frac{(2y - 4x + 6)(2x - 4)}{x^2 - 4} = 0;$$

3.5

$$\frac{(6 - 2y)(y - 3)}{(y - 2x + 1)(x - 4)} = 0.$$

При каких значениях параметра  $a$  система имеет ровно одно решение (ранее упоминалось, что одно решение необходимо здесь интерпретировать как одну общую точку пересечения прямых при заданных условиях):

$$4.1 \begin{cases} y = ax - 1, \\ x > 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

$$4.2 \begin{cases} y = ax + 2, \\ x < 0, \\ y = -2. \end{cases}$$

$$4.3 \begin{cases} y = ax + a - 3, \\ x < 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$4.4 \begin{cases} y = 2ax - 6, \\ x < -2, \\ y = 3. \end{cases}$$

$$4.5 \begin{cases} y = 2ax + 2a - 2, \\ x > 1, \\ y = 4. \end{cases}$$

При каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет ровно 1 решение:

5.1

$$\frac{x^2 - 9}{x + a} = 0$$

5.2

$$\frac{2a - x}{x + 2} = 0$$

5.3

$$\frac{a^2 - 9x^2}{a + 4x - 2} = 0$$

5.4

$$\frac{4a^2 - x^2}{a - x} = 0$$

5.5

$$\frac{a^2 - x^2}{(2a + 4x + 2)(a - x + 1)} = 0$$

**Задания, предлагающиеся на ЕГЭ.**

1. (ЕГЭ, 2015) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} (y - 7) = xy - 5(x + 2), \\ x \leq 6, \\ \frac{a(x-6)-2}{y-2} = 1. \end{cases}$$

2. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет единственный корень:

$$2^x - a = \sqrt{2^x - 3a}$$

3. (ЕГЭ, 2020) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных решения:

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

4. (ЕГЭ, 2023) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет ровно один корень:

$$\sqrt{3 - 5x} \ln(4x^2 - a^2) = \sqrt{3 - 5x} \ln(2x + a)$$

5. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение имеет ровно один корень:

$$\ln(4x - 1) \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0$$